

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОЦЕДУР**

*Аннотация.* Предлагается методика применения параметрического спектрального анализа, в основе которой лежит рекуррентная процедура метода наименьших квадратов. В основе рекуррентного метода предложено применить расчетные параметры средства измерений, что сокращает объем вычислений.

*Ключевые слова:* динамические характеристики, рекуррентная схема, измерения, параметрический спектральный анализ

*Abstract.* The authors suggest a method of determining full dynamic characteristics of measurement instruments using the recurrence scheme. The method consists of applying the parametric spectral analysis based on recurrence procedure of least square technique. It is offered to apply calculating parameters of a measurement tool in the core of recurrence method, resulting in minimizing computation intensity.

*Key words:* dynamic features, recurrence scheme, measurements, parametric spectral analysis.

### **Введение**

При определении полных динамических характеристик средств измерений получают отклики (сигналы), имеющие короткую длительность [2]. В основном для определения полных динамических характеристик датчиков механических величин применяют методы, основанные на Фурье-преобразовании, или параметрические методы спектрального анализа. Методы, основанные на преобразовании Фурье, обладают недостатками, которые делают неэффективным их применение.

Первый недостаток: для обеспечения хорошей разрешающей способности необходимо обрабатывать отклики с достаточно большой длительностью, а в задачах определения полных динамических характеристик отклики имеют короткую длительность.

Второй недостаток: при применении методов, основанных на Фурье-преобразовании, получают частотные характеристики исследуемой системы (объекта), по которым можно вычислить линейные колебания на разных частотах. Но на практике необходимо находить параметры исследуемого объекта. Для этого надо аппроксимировать полученные характеристики, что ухудшает разрешающую способность этих методов для определения требуемых параметров системы.

### **1. Описание математической модели**

Параметрические методы спектрального анализа лишены недостатков, присущих методам, основанным на применении Фурье-преобразования. Для применения параметрических методов необходимы предварительные сведения об испытуемом объекте и знание математической модели объекта.

Разрабатываемый метод должен хорошо вписываться в математическую модель средства измерений и с достаточной точностью описывать динамический режим, протекающий в средствах измерений. Только в этом случае можно получить достаточно приемлемые результаты.

Динамический режим средств измерений в дискретной форме имеет вид

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_{p_a} y[n-p_a] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_{p_b} x[n-p_b],$$

где  $y[i]$  – выходной сигнал;  $x[i]$  – входной сигнал;  $a_1, a_2, \dots, a_{p_a}, b_0, b_1, \dots, b_{p_b}$  – коэффициенты;  $p_b, p_a$  – порядок числителя и знаменателя передаточной функции.

Датчики переменных давлений имеют вид разомкнутого звена. Поэтому динамический режим в дискретной форме описывается авторегрессионными (АР) уравнениями [1]. С учетом того, что  $b_i = 0$  (для АР режима) при  $i = 1, 2, \dots, p_b$ , получим

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_{p_a} y[n-p_a].$$

Связь между входным сигналом и выходным сигналом в  $z$ -форме имеет вид

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

где  $Y(z), X(z), H(z)$  –  $z$ -преобразование выходного, входного сигналов и передаточной функции.

С учетом того, что в рассматриваемом случае входным сигналом является дельта-функция (для дельта-функции  $X(z) = 1$ ), имеем

$$Y(z) = H(z),$$

что упрощает задачу определения параметров передаточной функции  $H(z)$ , так как в рассматриваемом случае отклик сигнала совпадает с импульсной переходной характеристикой.

Для вышеприведенных соотношений импульсная переходная характеристика имеет вид

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n_1} A_i e^{-\alpha_i t} \sin(f_i t + \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n_2} A_i e^{-\alpha_i t},$$

где  $A_i, \alpha_i, f_i, \varphi_i$  – амплитуда, декремент колебания, собственная частота, фаза составляющих модели;  $t$  – время;  $n_1, n_2$  – количество экспоненциально затухающих синусоид и количество затухающих экспонент.

В нашем случае задача применения метода параметрического спектрального анализа состоит в нахождении параметров  $A_i, \alpha_i, f_i, \varphi_i, n_1, n_2$ , соответствующих экспериментальным данным.

Выбор модели такого вида обусловлен тем, что такое описание хорошо вписывается в физическое математическое описание объекта.

## 2. Описание метода

Связывание параметров самого объекта с параметрами АР-описания, получаемыми непосредственно по экспериментальным данным, намного упрощает процедуру нахождения этих параметров.

Реализация параметрических методов спектрального анализа усложняется тем, что экспериментальные данные содержат помехи, имеющие различный характер. Поэтому вычисляемые параметры получаются смещенными. Отсюда вытекает задача разработки или модификации метода для получения несмещенных оценок параметров объекта, когда экспериментальные данные содержат помехи.

Следующая сложность заключается в том, что применение параметрических методов спектрального анализа подразумевает знание как формы (вида) сигнала, так и количества составляющих модели – порядка модели.

Определение порядка модели – сложная и трудоемкая задача. Хотя имеющиеся подходы к нахождению порядка модели дают удовлетворительные результаты, но при наличии погрешностей порядок модели получается явно завышенным. Поэтому усложним задачу: необходимо разработать метод определения параметров модели на основе экспериментальных данных с возможностью выбора порядка модели.

Метод основан на применении рекуррентной процедуры уточнения результатов обработки, что позволяет, не завышая порядок модели, получить искомые значения параметров объекта.

Метод состоит из трех этапов:

– на первом этапе применяется метод параметрического спектрального анализа – метод Прони;

– на втором этапе применяется рекуррентная процедура уточнения параметров модели;

– на третьем этапе находятся параметры синусоидальных составляющих модели.

На первом этапе минимизируем с применением метода наименьших квадратов невязку  $U$ :

$$U = \sum_{i=0}^{N-1} e_i^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - \bar{y}_i)^2,$$

где  $U$  – невязка;  $N$  – количество отсчетов;  $y_i, \bar{y}_i$  – отсчеты и оценки отсчетов;  $e_i$  – ошибки.

Выполняя преобразования с применением метода Прони, находим вектор АР-параметров  $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ :

$$\begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_{p+1} \\ y_{p+2} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

На втором этапе производится уточнение полученных параметров по рекуррентной схеме:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{R} \frac{\mathbf{R}^T \mathbf{A}_k - r(k)}{1 + \mathbf{R}^T \mathbf{P}_k \mathbf{R}}, \quad \mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_k - \frac{\mathbf{P}_k \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{P}_k}{1 + \mathbf{R}^T \mathbf{P}_k \mathbf{R}},$$

где  $A_k$  – вектор параметров на  $k$ -м шаге рекуррентной процедуры уточнения параметров;  $\mathbf{R} = \{r(0), r(1), \dots, r(p)\}$  – авторегрессионные коэффициенты сигнала, рассчитываемые по формуле

$$r(m) = \sum_{i=0}^{N-m} y[i]y[i+m],$$

$\mathbf{P}_k$  – матрица весовых коэффициентов при ошибках.

Для расчета элементов  $p_{ij}$  матрицы  $\mathbf{P}$  (при  $k = 0$ ) можно использовать различные подходы. Первый подход:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть начальные значения матрицы  $\mathbf{P}$  принимаются равными единичной матрице.

Второй подход: матрица  $\mathbf{P}$  выбирается диагональной, а значения по главной диагонали вычисляются по следующей формуле:

$$p_{ii} = |a_i| / \sigma_i^2 = |a_i| / \sum_{i=0}^{N-1} e_i^2 = |a_i| / \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - \bar{y}_i)^2.$$

Третий подход: изначально диагональным элементам присваиваются большие значения, что соответствует заданию большой дисперсии начальных оценок из-за того, что начальная оценка обладает большой степенью неопределенности.

Рекуррентные вычисления проводят до того момента, пока параметры  $A$  не перестанут изменяться в пределах назначенной точности.

Второй этап заканчивается составлением характеристического уравнения

$$z^M - a_1 z^{M-1} - a_2 z^{M-2} - \dots - a_{M-1} z - a_M = 0,$$

решая которое, находим корни  $z_i$ .

На третьем этапе по найденным значениям параметров составляют основное соотношение Прони:

$$y[n] = \sum_{i=1}^M b_i z_i^n.$$

Для нахождения вектора  $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \dots, b_M)^T$  составляются соотношения

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_M^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_M^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{pmatrix},$$

или в матричном виде:

$$\mathbf{Z}\mathbf{B} = \mathbf{Y}.$$

Применив метод наименьших квадратов, можно получить вектор коэффициентов  $\mathbf{B}$  с параметрами  $b_i$ :

$$\mathbf{B} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{Y}.$$

Далее находят параметры модели (1) для всех  $p$  составляющих

$$\alpha_i = \frac{\ln|z_i|}{\Delta t}, \quad c^{-1}, \quad f_i = \frac{\arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(z_i)}{\operatorname{Re}(z_i)}\right)}{2\pi\Delta t} \text{ Гц}, \quad A_i = |b_i|, \quad \varphi_i = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(b_i)}{\operatorname{Re}(b_i)}\right),$$

где  $A_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $f_i$ ,  $\alpha_i$  – амплитуда, фаза, собственная частота и декремент колебания составляющих модели.

По полученным параметрам можно вычислить спектр:

$$S_p(f) = \left| \sum_{i=1}^p A_i \frac{2\pi f_i}{(\alpha_i + 2\pi j f)^2 + 4\pi^2 f_i^2} \right|.$$

Применение разработанной рекуррентной процедуры метода наименьших квадратов в задачах определения полных динамических характеристик средств измерений на примере датчиков быстропеременных давлений позволило расширить частотный диапазон работы этих датчиков.

### **Заключение**

Важным достоинством разработанного метода является возможность применения его в задачах аттестации в серийном производстве. В этом случае за первую итерацию принимаются значения вектора параметров, вычисленных по расчетным значениям параметров модели выбранного типа средства измерений.

На основе разработанного метода определения полных динамических характеристик средств измерений с применением рекуррентной схемы вычислений создана методика, позволяющая получать параметры модели средства измерений с уменьшением объема вычислений.

### **Список литературы**

1. **Щербаков, М. А.** Восстановление входного сигнала по результатам идентификации динамических характеристик средств измерений / М. А. Щербаков, В. П. Иосифов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2007. – № 3. – С. 3–8.
2. **Щербаков, М. А.** Разработка методик обработки откликов с датчиков с короткой длительностью / М. А. Щербаков, В. П. Иосифов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2006. – № 6. – С. 245–252.
3. **Иосифов, В. П.** Итерационная методика определения динамических характеристик датчиков по откликам с короткой длительностью / В. П. Иосифов // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – 2006. – № 4. – С. 17–18.

***Иосифов Валерьян Павлович***

кандидат технических наук, доцент,  
старший научный сотрудник, кафедра  
автоматики и телемеханики, Пензенский  
государственный университет

E-mail: iosif65@bk.ru

***Iosifov Valeryan Pavlovich***

Candidate of engineering sciences, associate  
professor, senior staff scientist,  
sub-department of automation and remote  
control, Penza State University

---

УДК 531.787

**Иосифов, В. П.**

**Определение полных динамических характеристик средств измерений с применением рекуррентных процедур / В. П. Иосифов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 1 (17). – С. 126–131.**